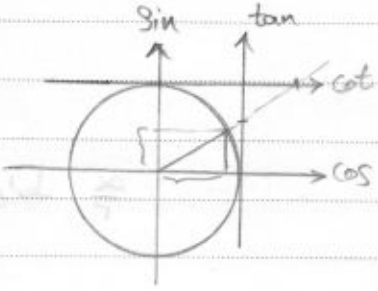
Subject

Date. Month. Year.

مثلثات :

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \rightarrow \begin{cases} R = \frac{\pi}{180} D \\ D = \frac{180}{\pi} R \end{cases}$$



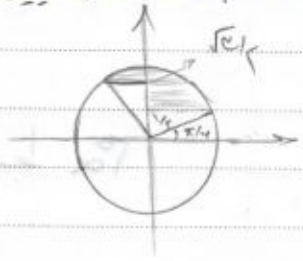
$$\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$$

$$\alpha + k\pi$$

$$\alpha + \frac{k\pi}{2}$$

فرد

مثال) اگر $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$, $\sin\alpha = \frac{2m-1}{4}$ باشد، محدود تغییرات m ؟



$$\frac{1}{2} \leq \frac{2m-1}{4} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2 = 1 \qquad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\tan\alpha \times \cot\alpha = 1 \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

روابط $\alpha \pm \beta$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

روابط 2α

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

روابط $\frac{\alpha}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2} \\ \cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+\cos\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \text{طلایی}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

روابط 3α

$$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha+\alpha)$$

$$= \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha \to 1-2\sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha \to 1-\sin^2\alpha$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

$$\tan(2\alpha+\alpha)$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

مثال) نسبت های $\sin 15^\circ$, $\sin 22.5^\circ$, $\sin 67.5^\circ$

$$\sin(45-30) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2\frac{30}{2} = \frac{1-\sqrt{3}/2}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin 22.5 = \sin\frac{45}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{45}{2} = \frac{1-\cos 45}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 45/2 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin 67.5 = \sin\frac{135}{2} = +\sqrt{\frac{1-(-\sqrt{2}/2)}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 135 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

کاربرد مثلثات

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$$

$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$a = c\cos\hat{B} + b\cos\hat{C}$$

Subject

Date. Month. Year.

مثال) آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که

$a=2,\ b=6,\ S=3$

$3=\frac{1}{2}\times 6\times 2\sin\hat{C} \Rightarrow \sin\hat{C}=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}\hat{C}=30^\circ\\ \hat{C}=150^\circ\end{cases}$

در مثلثی $a=1,\ b=3,\ c=\sqrt{7}$، زاویه روبه‌رو به ضلع c؟

$\cos\hat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C}=60^\circ$

مثال‌های دوره‌ای:

1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{19\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\cancel{\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}$

$\pi+\pi/6 \qquad 5\pi-\pi/4 \qquad 2\pi-\pi/3$

$2\pi+\pi/4 \qquad 6\pi+\pi$

2) $\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\cos\left(7\pi-x\right)}{\cot\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{\cos x-\cos x}{\ldots}=0$

3) $\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\ldots\times\underbrace{\tan 88^\circ}_{\cot 2^\circ}\times\underbrace{\tan 89^\circ}_{\cot 1^\circ}=\tan 45^\circ=1$

4) در کدام ناحیه، رابطه زیر یک اتحاد است.

$\tan x+\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\frac{1}{\cos x}$

$\times\ \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{|1-\sin x|}{|\cos x|}=\frac{1}{\cos x} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1-\sin x}{|\cos x|}=\frac{1}{\cos x}$

Subject

Date. Month. Year.

$\Rightarrow \frac{1-\sin x}{|\cos x|} = \frac{1-\sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow$ x در ناحیه ۱ و ۴ باشد

۵) معادله زیر را حل کنید.

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}\sin 5^\circ \cos 7 + \overbrace{\tan \pi/4}^{\sqrt{2}} \cdot \cos 5^\circ \cdot \sin 7^\circ}{4\underbrace{\cos 84^\circ}_{\sin 6^\circ} \cdot \cos 6^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\cancel{\sin 6^\circ}}{2\,\cancel{\sin 6^\circ}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \pi/2 \\ 2k\pi + \pi - \pi/4 \end{cases}$$

۶) ساده کنید.

مخرج مشترک

$$\frac{\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)}{\cos 20^\circ} \rightarrow \frac{\sin(10+70^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} \rightarrow \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\cos 50^\circ \rightarrow \sin 40^\circ}{\cos 20 \cdot \underbrace{\cos 70}_{\sin 20}} = \frac{\sin 40}{\frac{1}{2}\sin 40} = 2$$

۷) $0 < x < \pi/4 \rightarrow \sqrt{1+2\sqrt{\underbrace{\sin^2 x}_{\sin x}} \times \sqrt{\underbrace{1-\sin^2 x}_{\cos^2 x}}}$

$$= \sqrt{1+2\sin x\cos x} = \sqrt{1+\sin 2x} = \sqrt{(\sin x+\cos x)^2} = \sin x + \cos x$$

۸) مقدار عددی

الف) $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} \times \frac{\sin \pi/5}{\sin \pi/5}$

$$\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin \pi/5} = \frac{1}{4}\frac{\sin 4\pi/5}{\sin \pi/5} = \frac{1}{4}$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

$\pi/2 - \frac{\pi}{8}$

ب) $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$

$= 2\left(\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{\pi}{8}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 3/2$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin^2\cos^2$

$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

9) $\sin x = \frac{1}{3} \longrightarrow \tan\frac{x}{2} = ?$

$\cos x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1/3}{1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$= \frac{1}{3 \pm 2\sqrt{2}}$

$\sin x = \frac{2\sin x/2}{\cos x/2}\cos^2 x/2 = 2\tan x/2 \times \frac{1}{1+\tan^2 x/2}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$, $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$\tan 60^\circ$

10) $(\sqrt{3} + \tan 1^\circ)(\sqrt{3} + \tan 2^\circ) \ldots (\sqrt{3} + \tan 29^\circ)$

$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$

$\frac{\sin 61}{\cos 60 \cdot \cos 1} \times \frac{\sin 62}{\cos 60 \cdot \cos 2} \times \ldots \times \frac{\sin 89^\circ}{\cos 60 \cdot \underbrace{\cos 29}_{=2^{29}}} = \frac{1}{\cos 60}$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

تبدیلات جمع به ضرب و ضرب به جمع :

جمع به ضرب:

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

ضرب به جمع:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$A = \underbrace{\frac{A+B}{2}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{A-B}{2}}_{\beta}$$

$$B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$$

مثال ۱) به ضرب تبدیل کنید:

$$\underbrace{\cos\overset{2x-x}{x} + \cos 2x}_{2\cos 2x\cos x} + \cos\overset{2x+x}{3x} = 2\cos 2x\left(\cos x + \overset{\cos\pi/3}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 4\cos 2x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

مثال)

الف) $\dfrac{\sin \overset{60+20}{80^\circ} + \sin \overset{60-20}{40^\circ}}{\sin 70^\circ} = \dfrac{2\sin 60^\circ \cos 20^\circ}{\sin 70^\circ} = \sqrt{3}$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

ب) $\underbrace{\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ}_{1/2(\cos 60^\circ + \cos 40^\circ)} + \underbrace{\cos^2 80^\circ}_{\frac{1+\cos 160^\circ}{2}} = \frac{1}{2}\cos 60^\circ + \frac{1}{2}$ $\quad -\cos 20^\circ$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

اثبات تناوب sin :

$f(x) = \sin x \qquad D = \mathbb{R}$

$f(x+T) = f(x) \longrightarrow \sin(x+T) = \sin x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \cancel{x}+T = 2k\pi + \cancel{x} \Rightarrow T = 2k\pi \xrightarrow{\text{اصلی}} T = 2\pi \\ x+T = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow \times \ \forall x \end{cases}$

معادله مثلثاتی

معادلات پایه :

$\sin X = \sin\alpha$

$X = \begin{cases} 2k\pi + \alpha \\ 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

$\tan X = \tan\alpha$

$X = k\pi + \alpha$

$\cos X = \cos\alpha$

$X = 2k\pi \pm \alpha$

$\cot X = \cot\alpha$

$X = k\pi + \alpha$

Subject

Date. Month. Year.

حالتهای خاص:

الف) ریشه مضاعف

$\sin x = 1 \leftarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x = -1 \leftarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$

$\cos x = 1 \leftarrow x = 2k\pi$

$\cos x = -1 \leftarrow x = (2k+1)\pi$

ب) حالتهای با نمایش ساده‌تر:

$\sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi$

$\cos x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

عامل‌های مضاعف:

$(\sin x \pm 1),\ (\cos x \pm 1)$

تذکر: گاهی جواب‌های به ظاهر متفاوت از روش‌های مختلف حاصل می‌شود که برای یکسان سازی از دایره کمک می‌گیریم (معمولاً جواب $[0, 2\pi]$)

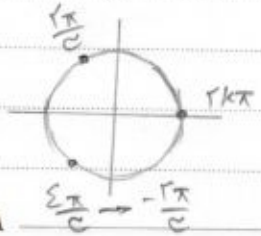
$\cos \underbrace{2x}_{X} = \cos \underbrace{x}_{\alpha} \xrightarrow{①} \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \rightarrow x = 2k\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$2\cos^2 x - 1 = \cos x$

$2\cos^2 x - \cos x - 1$

$\xrightarrow{②} \begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{-1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$

جواب برابر



$\Longrightarrow 2k\frac{\pi}{3}$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

تذکر ۲: در صورت امکان به کمک اتحادها یا تبدیلات یا ... ابتدا معادله را ساده می‌کنیم.

مثال)

۱) $\sin x = \sin 5x + \cos 3x$

۲) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{8}$

۳) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 4$

۴) $1 + \sqrt{\cos x} = \cos^2 x$

① $\underbrace{\sin \overset{3x-2x}{x} - \sin \overset{3x+2x}{5x}}_{-2\cos 3x \cdot \sin 2x} = \cos 3x \longrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

② $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \underbrace{2\sin^2 x \cdot \cos^2 x}_{\frac{1}{2}\sin^2 2x} \longrightarrow \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{7}{8}$

$\longrightarrow \sin^2 2x = \frac{7}{4}$ ✗ $\emptyset$

③ $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\underbrace{\sin^2 x \cos^2 x}_{\frac{1}{4}\sin^2 2x}} = 4 \xrightarrow{\sin 2x \neq 0} \sin^2 2x = 1$

$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$

④ $1 + \sqrt{\cos x} = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\longrightarrow \sqrt{\cos x} + \sin^2 x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$ ✗

SANA

Subject

Date. Month. Year.

- برخی ایده‌های حل معادلات مثلثاتی

۱- $\sin^n x = \sin^n \alpha$ یا $\cos^n x = \cos^n \alpha$ یا $\tan$ یا $\cot$

n فرد ← حذف توان

n زوج ← $k\pi \pm \alpha$

مثال) $\sin^2 x = \frac{1}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{4}$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\rightarrow k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۲- $\sin u = \overset{\pm}{\cos v}$

تتمم

$\sin \underbrace{u}_{x} = \sin(\underbrace{\frac{\pi}{2} - v}_{\alpha})$

$\tan u = \overset{\pm}{\cot v}$

به کمک

$\frac{\pi}{2} - \alpha$

۳- $\sin u = k \cos u$ ، $\tan u = k \cot u$

$\div \cos u$

$\tan u = k$

$1/\tan u$

$\tan^2 u = k$

۴- $\tan u . \tan v = \pm 1$ یا $\cot u . \cot v = \pm 1$

مرحله ۱: تقسیم مرحله ۲: $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$

$\tan x \tan 3x = \overset{-}{1}$

$\tan x = \overset{-}{\cot 3x} = \tan(\frac{\pi}{2} \overset{+}{-} 3x)$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

۵- $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0 \rightarrow t = \sin x \rightarrow \dots$

$\cos^2 x \quad \cos x$

$t = \cos x \rightarrow \dots$

$a\sin^2 x + b\cos x + c = 0$

$1-\cos^2 x$

$a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$

$1-\sin^2 x$

۶- حاصلضرب چند sin یا cos ، ۱ یا ۱- شود.

مثال:

$\underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{1} \cdot \underbrace{\cos x}_{1} = 1$

یا

$-1 \quad -1$

۷- مجموع چند sin یا cos ، برابر مجموع ضرایب شود.

$\underbrace{2\sin 2x}_{1} + \underbrace{3\cos^2 x}_{1} = 5 \Leftarrow \quad 0 < \sin\alpha < 1 \quad 0 < \cos\alpha < 1$

۸- $a\tan x + b\underbrace{\cot x}_{\frac{1}{\tan x}} = c \rightarrow$ درجه ۲ برحسب tan

۹- $a\sin x + b\cos x = c$

$\xrightarrow{\div\sqrt{a^2+b^2}} \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\alpha}\sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\alpha}\cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{c'}$

$\sin(x+\alpha) = c' \qquad -1 \leq c' \leq 1$

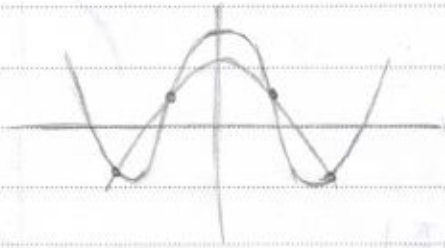
SANA

Subject

Date. Month. Year.

تذکر ۴: اگر معادله مثلثاتی قابل حل نباشد، برای تعیین تعداد جواب‌ها، نمودار می‌تواند مفید باشد.

$2\cos 2x = 1 - x^2$

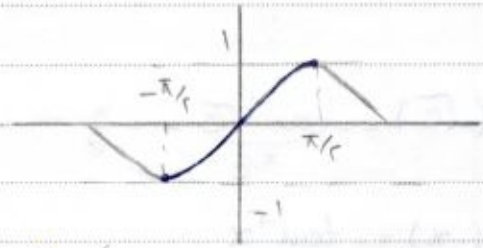


توابع وارون مثلثاتی:

$y = \sin x$

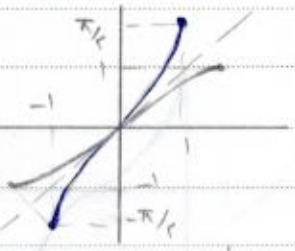
$D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$R = [-1, 1]$



$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

فرد



$y = \sin^{-1} x \rightarrow \sin y = x$

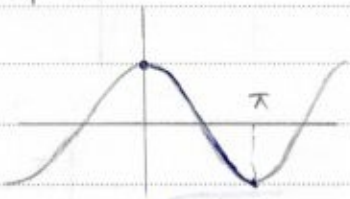
$D = [-1, 1]$

$R = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = \cos x$

$D = [0, \pi]$

$R = [-1, 1]$

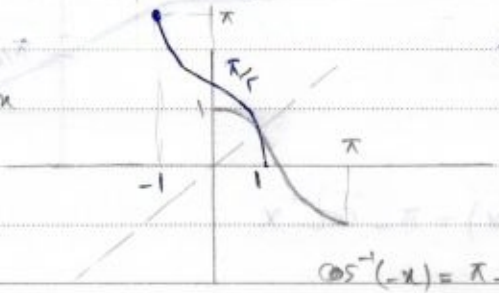


نه زوج نه فرد

$y = \cos^{-1} x \rightarrow \cos y = x$

$D = [-1, 1]$

$R = [0, \pi]$



$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

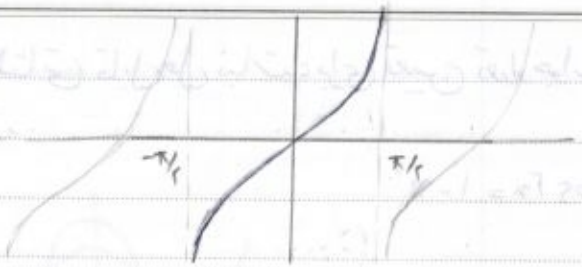
Subject

Date. Month. Year.

$y = \tan x$

$D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

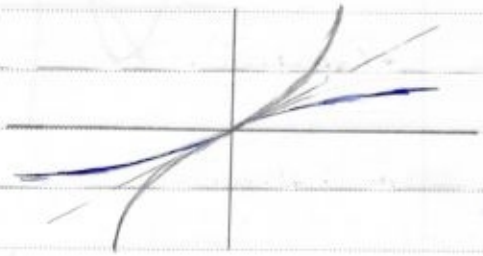
$R = \mathbb{R}$



$y = \tan^{-1} x$

$D = \mathbb{R}$

$R = (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



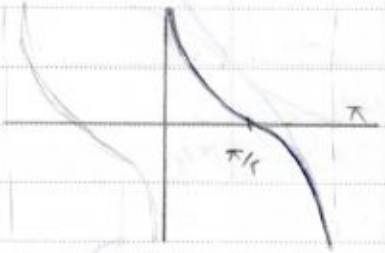
$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\underbrace{\tan^{-1}\sqrt{3}}_{\pi/3} = -\frac{\pi}{3}$

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$ فرد

$y = \cot x$

$D = (0, \pi)$

$R = \mathbb{R}$

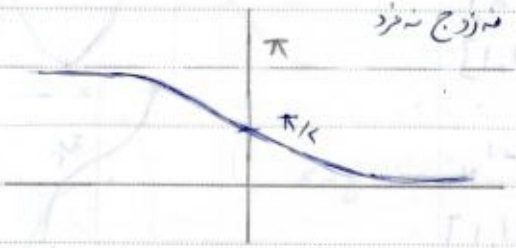


$y = \cot^{-1} x$

$D = \mathbb{R}$

$R = (0, \pi)$

نه زوج نه فرد



$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$

Subject

Date. Month. Year.

مثال)

$\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\pi}{4}$

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

$\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$

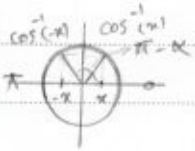
$\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$

$\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$

$\sin^{-1}(\sin 4) = \pi - 4$

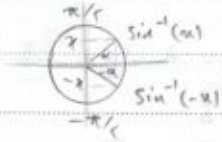
$\sin^{-1}(\sin 3) = \pi - 3$

محاسبه توابع وارون مثلثاتی برای کمان $(-x)$ به کمک دایره



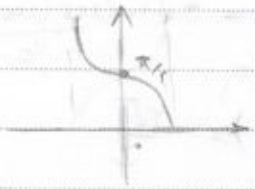
$\cos^{-1}x + \cos^{-1}(-x) = x$

$-1 \leq x \leq 1$



$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$

$\cos^{-1}x$



$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(a,b)

$y = f(x) = \cos^{-1}(x)$

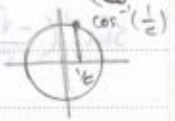
$2b - y = f(2a - x) \Rightarrow \pi - \cos^{-1}x = \cos^{-1}(-x)$

Subject

Date. Month. Year.

مثال)

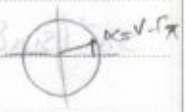
$\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}$



$\cos^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$ $\qquad$ $\cos^{-1}\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{4\pi}{5}$

$\cos^{-1}\left(\cos\underbrace{\frac{6\pi}{5}}_{\pi+\pi/5}\right) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ $\qquad$ $\cos^{-1}(\cos 5) = 2\pi - 5$

$\cos^{-1}(\cos 4) = 2\pi - 4$ $\qquad$ $\cos^{-1}(\cos \overset{7}{\cancel{8}}) = 7 - 2\pi$



$0 < 7 < \pi$ ✗

$\cos^{-1}\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{12}}_{\cos(\pi/2 - \pi/12)}\right) =$ $\qquad$ $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{12}$

$\sin^{-1}\left(\underbrace{\cos\frac{2\pi}{5}}_{\sin(\pi/2 - \frac{2\pi}{5})}\right) =$ $\qquad$ $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\pi}{10}$

$\cos^{-1}\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right) = \cos^{-1}\left(-\sin\frac{2\pi}{5}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\underbrace{\sin\frac{2\pi}{5}}_{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5})}\right) = \pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$

$\sin\frac{7\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5}$

$\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right) = +\sqrt{1 - \left(\underbrace{\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)}_{1/3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\left(\cos^{-1}\frac{-\sqrt{2}}{4}\right) = \begin{cases} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\alpha = ? \end{cases}$ $\qquad$ $\pm\sqrt{1 - \frac{2}{16}} = \oplus\sqrt{\frac{7}{8}}$

α ربع دوم

$\underbrace{\sin^{-1}\frac{3}{5}}_{\alpha} + \underbrace{\cos^{-1}\frac{2}{5}}_{\beta} =$ $\qquad$ $\sin(\alpha+\beta) = \underset{3/5}{\sin\alpha}\,\underset{2/5}{\cos\beta} + \underset{4/5}{\cos\alpha}\,\underset{1/5}{\sin\beta} = 1$

$0 < \beta < \pi/2$

$2\alpha + 2\pi/2 \rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $\alpha + \beta = 2k\pi + \pi/2$ $\quad k = 0$

$\Rightarrow \alpha + \beta = \pi/2$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

$$\cos^{-1}(x)=\alpha \xleftrightarrow[0\le\alpha\le\pi]{-1\le x\le 1} x=\cos\alpha$$

$$\sin^{-1}(x)=\alpha \xleftrightarrow[-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}]{-1\le x\le 1} x=\sin\alpha$$

$$\tan^{-1}(x)=\alpha \xleftrightarrow[-\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi/2]{x\in\mathbb{R}} x=\tan\alpha$$

$$\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha}+\underbrace{\cos^{-1}x}_{\beta}=\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2} \qquad 0\le\beta\le\pi$$

$$\sin\alpha=x \qquad \cos\beta=x$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\underbrace{\sin\alpha}_{x}\,\underbrace{\cos\beta}_{x}+\underbrace{\cos\alpha}_{\sqrt{1-x^2}}\,\underbrace{\sin\beta}_{\sqrt{1-x^2}}=x^2+(1-x^2)=1$$

$$\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{k=0} =\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\alpha+\beta\le\frac{3\pi}{2}$$

مثلثاتی { جمع ← همان ک.م.م
ضرب ← ابتدا تبدیل به جمع

$$y=\underset{\pi}{\cos 2x}+\underset{\pi/3}{\cos 6x} \rightsquigarrow \text{ک.م.م}=\pi$$

$$y=\cos 2x\times\cos 6x=\frac{1}{2}(\underset{\pi/4}{\cos 8x}+\underset{\pi/2}{\cos 4x})$$

$$\Rightarrow T=\pi/2$$

Subject

Date. Month. Year.

$$\tan^{-1}\left(\tan\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{4\pi}{5} - \pi = -\frac{\pi}{5}$$

$$\tan^{-1}(\tan 3) = 3 - \pi$$

$$\tan(\tan^{-1} 5) = 5$$

$$\underbrace{\tan^{-1} 3}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}\frac{1}{3}}_{\beta} = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}\right) = \begin{cases} \tan\alpha = \frac{3}{4} & \text{مثلث قائم الزاویه} \\ \cos\alpha = ? \end{cases}$$

$$\underbrace{\tan^{-1}\frac{1}{2}}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}\frac{1}{3}}_{\beta} = \begin{cases} \tan\alpha = \frac{1}{2} \\ \tan\beta = \frac{1}{3} \end{cases} \rightsquigarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 1$$

$$\alpha + \beta = \cancel{k\pi} + \pi/4 = \pi/4$$

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \pi/2 \\ 0 < \beta < \pi/2 \end{cases}$$

$$0 < \alpha + \beta < \pi$$

$$\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 =$$

$$-1 < \alpha + \beta < \pi$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{2+3}{1-2\times 3} = -1 \Rightarrow \alpha+\beta = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{3\pi}{4}$$

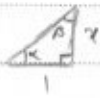
$$\cos(3\underbrace{\tan^{-1} 2}_{\alpha}) = \begin{cases} \tan\alpha = 2 \\ \cos 3\alpha = ? = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \end{cases}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{25} - \frac{15\sqrt{5}}{25} = \frac{-11\sqrt{5}}{25}$$

Subject

Date. Month. Year.

11) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & x>0 \\ -\pi/2 & x<0 \end{cases}$

روش ۱  $\rightarrow \alpha+\beta = \pi/2$

روش ۲ $x = \tan\alpha \quad 0<\alpha<\pi/2$

$\frac{1}{x} = \tan\beta \quad 0<\beta<\pi/2 \Rightarrow \tan\alpha = \cot\beta = \tan(\frac{\pi}{2}-\beta)$

$\rightsquigarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} - \beta$

$0<\alpha+\beta<\pi \qquad \Rightarrow \alpha+\beta = \cancel{k}_{0}\pi + \pi/2$

روش ۳

$x<0 \Rightarrow -x>0 \Rightarrow \tan^{-1}(-x) + \tan^{-1}(\frac{-1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(\frac{1}{x}) = \pi/2$ ✓

روش ۴

$\rightarrow -\frac{\pi}{2}<\alpha<0$

$\rightarrow -\frac{\pi}{2}<\beta<0$ $\Big\} \rightarrow -\pi<\alpha+\beta<0$

$\Rightarrow \alpha+\beta = \cancel{k}_{-1}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}$

$\sin(\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha}) = \sqrt{1-x^2}$

$0 \leq \alpha \leq \pi \longrightarrow \cos\alpha = x$ ✓

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-x^2}$

$\cos(\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha}) = \sqrt{1-x^2}$

$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$x = \sin\alpha$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-x^2}$

Subject

Date. Month. Year.

$$\sin(\tan^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \rightarrow \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\tan\alpha = x \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x>0 \rightarrow \text{ربع } 1, \alpha & : \sin>0 \\ x<0 \rightarrow \text{ربع } 4 & : \sin<0 \end{cases}$$

$$|\sin\alpha| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha}) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\cos\alpha = x \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \sin\alpha \rightarrow \pm\sqrt{1-x^2}, \quad \cos\alpha \rightarrow x$$

$$\cos^{-1}(\underbrace{\sin x}_{\cos\alpha}) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi$$

Subject

Date. Month. Year.

$$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}+k\pi$$

$k=-1,0,1$

توجه: اگر $-1<a$ و $b<1$ ، آنگاه $k=0$ بوده و لذا

$$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

$$\cot^{-1}a+\cot^{-1}b=\cot^{-1}\frac{ab-1}{a+b}+k\pi$$

$k=0 \text{ یا } 1$

$$\left.\begin{array}{ll}\tan\alpha=a & -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\\ \tan\beta=b & -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\longrightarrow -\pi<\alpha+\beta<\pi$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{a+b}{1-ab}=c \qquad \theta=\tan^{-1}c$$

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan\theta$$

$$\alpha+\beta=\theta+k\pi$$

$$-\frac{\pi}{2}<\left(\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}\right)<\pi/2$$

$k=-2$ ✗

$k=-1$ $-\frac{3\pi}{2}$ تا $-\pi/2$ ✓

$k=0$ ✓

$k=1$ $\pi/2$ تا $3\pi/2$ ✓

$k=2$ ✗

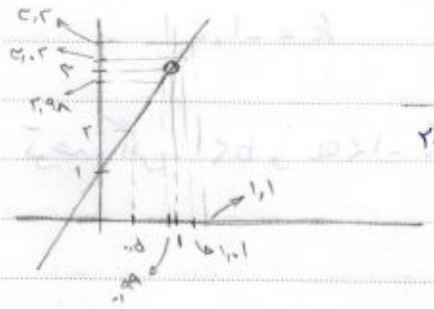
$$\left.\begin{array}{ll}-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\longrightarrow -\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi/2$$

$\Rightarrow k=0$

SANA

حد

مثال:



x	۰	۰,۵	۰,۹	۰,۹۹	۱,۰۱	۱,۱
$۲x+۱$	۱	۲	۲,۸	۲,۹۸	۳,۰۲	۳,۲

$\rightarrow ① \leftarrow$

$\rightarrow ② \leftarrow$

$\hookrightarrow ۳$

$۲,۹۹۹ < y < ۵,۰۰۱$ $\qquad |y-۵| < ۰,۰۰۱$ δ

$۰,۹۹۹۵ < x < ۱,۰۰۰۵$ $\qquad ۰ < |x-۱| < ۰,۰۰۰۵$ ϵ

$x \neq ۱$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۱} (۲x+۱) = ۳$$

می‌توان به میزان دلخواه y را به ۳ نزدیک کرد، به شرطی که به میزان مورد نیاز x را به یک نزدیک کنیم.

بنابراین تابع $y=۲x+۱$ در $x=۱$ حد دارد و حد آن برابر ۳ است.

حاشیه: (تعریف ϵ، δ حد)

$y = f(x)$

$$\forall_{\delta>۰} \ \exists_{\epsilon>۰} : \ ۰ < |x-x_۰| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_۰} f(x) = L$$

تذکر: برای بررسی حد تابع در $x_۰$، معین بودن یا نبودن تابع در $x_۰$ اهمیتی ندارد ($x \neq x_۰$)

Subject

Date. Month. Year.

$$0 < |x-1| < \epsilon \Rightarrow \frac{|(2x+1)-3|}{2(x-1)} < \delta$$

$$\Rightarrow |x-1| < \delta/2 \qquad \Rightarrow \varepsilon = \frac{\delta}{2}$$

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1 \quad (x \neq 1)$$

۰,۹	۰,۹۹	①	۱,۰۱	۱,۱
۲,۷	۲,۹۷	③	۳,۰۳	۳,۳

$x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$$

حاشیه:

$x = 1+\alpha$

$\alpha \neq 0$

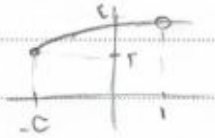
$$y = \frac{(1+\alpha)^3-1}{(1+\alpha)-1} \simeq \frac{1+3\alpha-1}{\alpha} = 3$$

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha$$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \qquad x_0 = 1$$

x	۰,۹	۰,۹۹۹	①	۱,۰۰۱	۱,۱
y	۳,۹۷	۳,۹۹۹۷	④	۴,۰۰۰۲	۴,۰۲

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = \sqrt{x+3}+2$$



$x = 1+\alpha$

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{4+\alpha}-2} \simeq \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{4}} = 4$$

$$\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{\alpha}{4}}-1\right)}{1+\frac{\alpha}{8}}$$

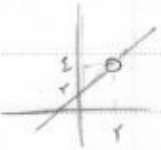
SANA

Subject

Date. Month. Year.

مثال)

الف) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\neq 2 \\ 5 & x=2 \end{cases}$ $\quad x_0=2$



ب) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$ $\quad x_0=0$

ج) $f(x)=\sqrt{x-1}$; $x_0=1$

* اگر فقط یک همسایگی (راست یا چپ) وجود داشته باشد، بررسی حد در همان همسایگی کافی است.

الف)

x	۱,۹	۱,۹۹	۲,۰۱	۲,۱
y	۴,۹	۴,۹۹	۴,۰۱	۴,۱

ب)

x	-۰,۱	-۰,۰۱	۰,۰۱	۰,۱
y	-۱,۱	-۱,۰۱	۰,۰۰۱	۰,۰۱

ج)

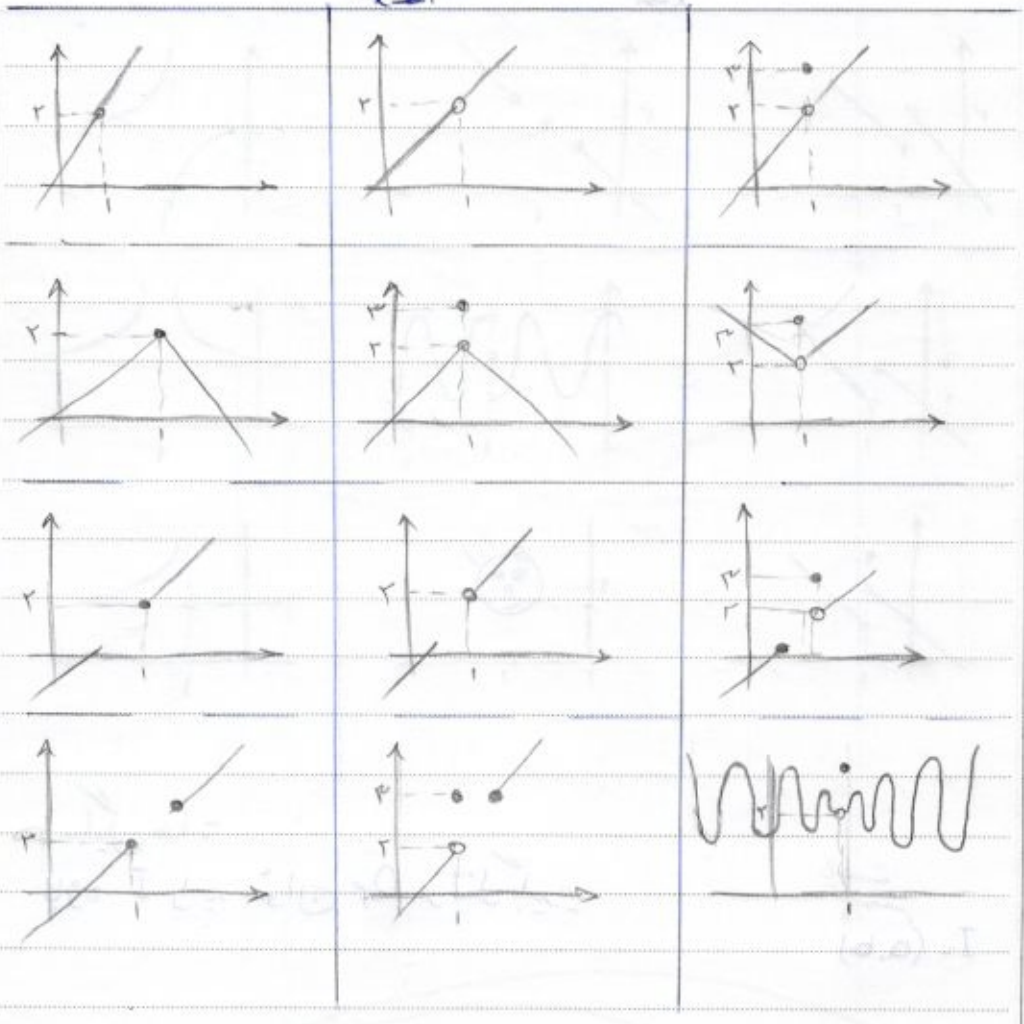
x	۱	۱,۰۱	۱,۱
y		۰,۱	۰,۳

$\lim_{x=1} f(x)=0$

Subject

Date. Month. Year.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = ۲$$

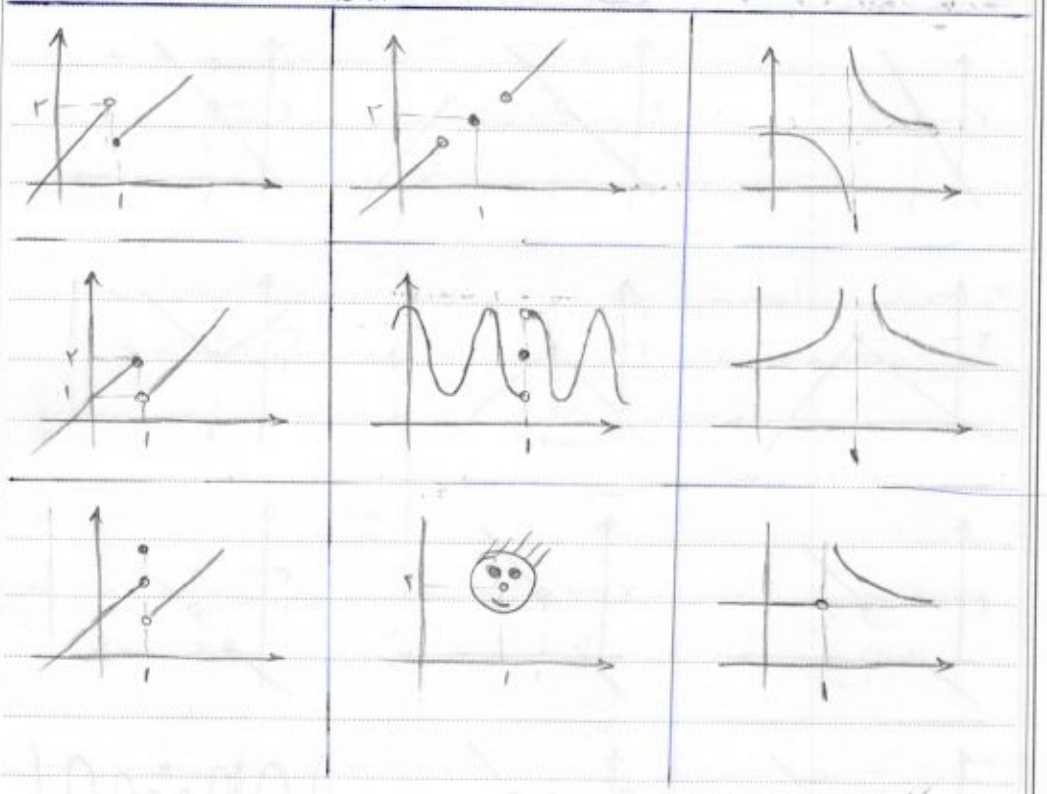


SANA

Subject

Date. Month. Year.

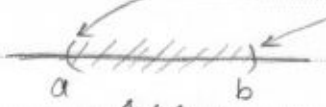
$\lim_{x \to 1} f(x)$ وجود ندارد X



همسایگی ها:

بازه I را به عنوان D_f در نظر بگیرید.

$I = (a, b)$ بابسته



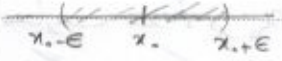
نقاط انتهایی: a یا b (سمت چپ یا راست b تابع تعریف نشده)

نقاط میانی: سایر نقاط I

Subject

Date. Month. Year.

همسایگی x_0 به شعاع ϵ: $|x-x_0|<\epsilon$

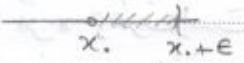


همسایگی محذوف x_0: $0<|x-x_0|<\epsilon$

$x\neq x_0$

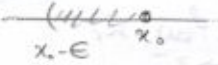
همسایگی راست x_0:

$(0<x-x_0<\epsilon)$



همسایگی چپ x_0:

$(-\epsilon<x-x_0<0)$



نماد: $x\to x_0^+$ (نزدیک شدن از سمت راست به x_0)

$x\to x_0^-$ (" " " " چپ ")

نکات:

۱- لازمه نزدیک شدن از راست به x_0، تعریف شدن f در همسایگی راست x_0 است.

۲- لازمه نزدیک شدن از چپ به x_0، تعریف شدن f در همسایگی چپ x_0 است.

۳- لازمه بررسی (وجود) حد f در x_0، تعریف شدن f در لااقل یک همسایگی (راست یا چپ یا هر دو) نقطه x_0 است.

Subject
Date. Month. Year.

تعاریف حد f در x_0 (با فرض وجود همسایگی x_0 در دامنه f)

۱) اگر با نزدیک شدن x به x_0، مقادیر f به عدد خاصی مانند L نزدیک شود، گوییم f در x_0 حد (همسایگی دو طرفه) دارد و حد آن برابر L است و می‌نویسیم $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

۲) (حد راست) (همسایگی راست) اگر x از طرف راست به x_0 نزدیک شود و مقادیر f به عددی مانند L_1 نزدیک شود، L_1 را حد راست تابع f در x_0 نامیده و می‌نویسیم $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$ ← $x \in (x_0, x_0+\epsilon)$

۳) حد چپ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$ $x \in (x_0-\epsilon, x_0)$

نکات:

۱- در هیچ یک از تعاریف فوق، لازم نیست f در خود x_0 تعریف شده باشد اما ~~در هیچ یک~~ باید x بتواند به هر میزان دلخواه به x_0 نزدیک شود.

۲- اگر x_0 یک نقطه‌ی میانی باشد، f در x_0 حد دارد اگر و تنها اگر حد راست و چپ موجود و برابر باشد.

۳- اگر x_0 یک نقطه‌ی انتهایی باشد، حد چپ (یا راست) در x_0 همان حد تابع در x_0 خواهد بود.

۴- بنابراین فقط در نقاط میانی مفهوم حد با حد راست و چپ متفاوت است.

۵- حد تابع در صورت وجود یکتا است.

Subject

Date. Month. Year.

مثال) حد راست / حد چپ / حد در x_0 داده شده؟

الف) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$, $x_0=1$ میانی

$(x\neq 1) \Rightarrow x+1$

$L_1=2$, $L_2=2$, $L=2$

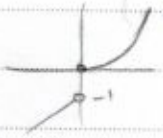
ب) $f(x)=\sqrt{1-x}$, $x_0=1$ انتهای

$(x\leq 1)$

L_1 X $L_2=0$ $L=0$

ج) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$, $x_0=0$ میانی $L_1=0$ $L_2=-1$

$L_1\neq L_2 \xRightarrow{\text{میانی}} L$ X

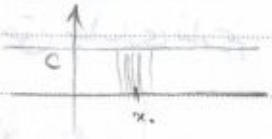


قضایای حد:

① حد تابع ثابت

$y=f(x)=c$

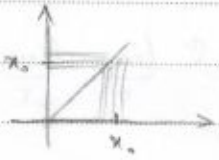
$\lim_{x\to x_0} f(x)=c$



② حد تابع همانی

$y=f(x)=x$

$\lim_{x\to x_0} f(x)=x_0$



③ قضیه ٤ عمل اصلی

فرض کنید f و g در لااقل یک همسایگی یکسان x_0 تعریف شده باشند

SANA

فرض $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L' \end{cases}$

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L+L'$$

$$\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = L-L'$$

$$\lim_{x\to x_0} (f\times g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x) = LL'$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{L'} \qquad (L'\neq 0)$$

تذکر: اگر شرایط قضیه فوق برقرار نباشد، بدین معنی نیست که $f \overset{\times}{\underset{\div}{\pm}} g$ حد ندارد، بلکه یعنی حق جداسازی نداریم.

$x_0 = 0$

$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ ✗ $\qquad f+g$ ✓

$g(x) = \frac{1}{x}$ ✗

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x\neq 1}} \frac{x^2-1}{x-1} \to x+1 \qquad \neq \frac{\lim x^2-1}{\lim x-1}$$

مثال: $\lim\limits_{x\to 2} (\underbrace{3x^2+2x}_{3\times x\times x+2\times x}) = \underbrace{\lim 3}_{3}\ \underbrace{\lim x}_{2}\ \underbrace{\lim x}_{2} + \underbrace{\lim 2}_{2}\ \underbrace{\lim x}_{2}$

Subject

Date. Month. Year.

④ حد توابع مثلثاتی

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0 \qquad (x_0 \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$$

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \cot x = \cot x_0 \qquad (x_0 \neq k\pi)$$

⑤ حد توابع رادیکالی

فرض: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

(با فرض نامنفی بودن مقادیر f در همسایگی x_0) برای n زوج

مثال: $\lim \sqrt{-x^2}$ ✗ $x=0$ فقط یک نقطه

⑥ حد تابع نمایی:

$f(x) = a^x \qquad a>0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a^{x_0}$$

مثال: به کمک قضایای فوق، حدود زیر را محاسبه کنید.

1) $\lim_{x\to -2} \frac{4x+7}{x-2} = \frac{\lim 4 \lim x + \lim 7}{\lim x - \lim 2} = \frac{(4\times -2)+7}{(-2)-2} = \frac{1}{4}$

2) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x + \sin x}{\cos x} = \frac{\lim \tan x + \lim \sin x}{\lim \cos x} = \frac{1+\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1+\sqrt{2}$

Subject

Date. Month. Year.

نتایج قضایای فوق :

① $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \rightarrow \lim_{x \to x_0} k f(x) = kL$

② $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ (n بار ضرب)

③ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

④ (حالت کلی تر ۲)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x))^n = L^n$

⑤ حد تابع کسری :

$f(x) = \dfrac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \dfrac{\lim(\quad)}{\lim(\quad)} \overset{?}{=} f(x_0)$

ریشه مخرج نباشد

* قضایا و نتایج فوق یعنی جایگذاری! (تحت شرایط آن)

مثال : $g(x) = |x| - 2$

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x > -1 \\ \dfrac{x+2}{x+1} & x < -1 \end{cases}$

Subject

Date. Month. Year.

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to -2}\frac{\frac{x+2}{x+1}}{\underbrace{|x|}_{-x}-2} = \lim_{x\to -2}\frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 2}(f+g)(x) = \lim f + \lim g = 12 + 0 = 12$$

ابهام و رفع ابهام

$$f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x^2-1}$$

۱) $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

۲) $\lim_{x\to -6} f(x) = \frac{0}{35} = 0$

۳) $\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{-10}{0}$ ×

۴) $\lim_{x\to 1} f(x) = ?$ $\quad \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+6)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{7}{2}$

- اگر $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ با استفاده از قضایای حد قابل محاسبه نیست و "مبهم" نامیده می‌شود $(\frac{0}{0})$

رفع ابهام: یعنی عملی انجام دهیم که کسر از حالت مبهم $(\frac{0}{0})$ خارج شود، بدین منظور باید عامل ابهام (مثلاً $x-x_0$) را از صورت و مخرج حذف کنیم.

(توجه: $x \neq x_0$ و لذا این کار مجاز است.)

SANA

Subject
Date. Month. Year.

یادآوری ۱: اگر $\underset{\text{چندجمله‌ای}}{P(a)} = 0 \Rightarrow$ عامل $x-a$

یادآوری ۲: $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$

$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$

روش‌های رفع ابهام ($\frac{0}{0}$)

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ $\qquad \frac{\text{حدی } 0}{\text{حدی } 0} \rightarrow$ رفع ابهام

$x \to 0^+ \quad \frac{x}{[x]}$ ✗ $\qquad \frac{\text{حدی } 0}{\text{مطلق } 0} \rightarrow$ تابع ثابت صفر (در همسایگی)

$x \to 0^+ \quad \frac{[x]}{x}$ $\qquad \frac{\text{مطلق } 0}{\text{حدی } 0} = 0$

$x \to 0^+ \quad \frac{[x]}{[x]}$ $\qquad \frac{\text{مطلق } 0}{\text{مطلق } 0}$ ✗

همسایگی راست در دامنه نیست

الف) توابع کسری گویا:

فاکتور گرفتن از $x - x_0$ و ساده کردن

ب) توابع رادیکالی:

$(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a}) = x - a$ $\qquad$ درجه ۲

$(\sqrt[3]{x} \underset{+}{-} \sqrt[3]{a}) = (\sqrt[3]{x}^2 \underset{-}{+} \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a}^2)$ $\qquad$ درجه ۳

$= x \underset{+}{-} a$ $\qquad$ چاق و لاغر

SANA

Subject

Date. Month. Year.

1) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+12}+x}{x^2+2x-3} \times \dfrac{\sqrt{x+12}-x}{\sqrt{x+12}-x} = \lim \dfrac{\overbrace{x+12-x^2}^{-(x+3)(x-4)}}{(x-1)(x+3)(\sqrt{x+12}-x)}$

$= \dfrac{-(-7)}{-4\times 6} = \dfrac{-7}{24}$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{2x}}{(x-2)} \times \dfrac{x+\sqrt{2x}}{(x+\sqrt{2x})} \to x(x-2)$ $= \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-1}{x^2+16} = \dfrac{1-1}{16+16} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{5x+9}+2}{3x+3} = \dfrac{2+2}{0} = \dfrac{4}{0}$ X ت.ن

5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+3}-3} \times \dfrac{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{2x+3}+3)}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{2x+3}+3)}$ $x-3$

$= \dfrac{\sqrt{2x+3}+3}{2\sqrt{x+1}+4} = \dfrac{3}{4}$ $\dfrac{2x-6}{2}$

★ اگر هم صورت و هم مخرج رادیکالی بود، همزمان در مزدوج یا چاق ضرب می‌کنیم

6) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{1-x}-2}{2+\sqrt[3]{2x+1}} \times \dfrac{\sqrt{1-x}+2}{\sqrt{1-x}+2} \times \dfrac{4-2\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}^2}{4-2\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}^2}$ $-x-3$ $1-$ $3x+9$

$= \dfrac{-(4-2\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}^2)}{3(\sqrt{1-x}+2)} = \dfrac{-1\times 12}{4\times 3} = -1$

7) $\lim \dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x} = \dfrac{1}{0}$ ت.ن $\sqrt{x}(x-\sqrt{x})$

8) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-[x]}{x^2-3x+2} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2} = -1$

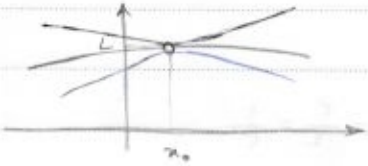
9) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x} = \dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos^3 x} = \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)} = \dfrac{2}{3}$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

قضیه فشردگی (افشردگی - ساندویچ - فشار)



1) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$

3) در همسایگی x_0، f بین g و h باشد.

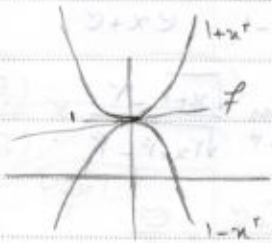
$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

مثلاً: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

مثال:

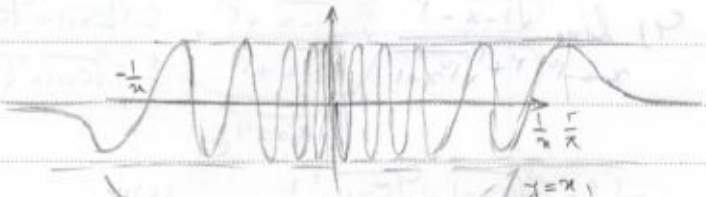
$x \in \mathbb{R} \qquad 1-x^2 \leq f(x) \leq 1+x^2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?\ 1$

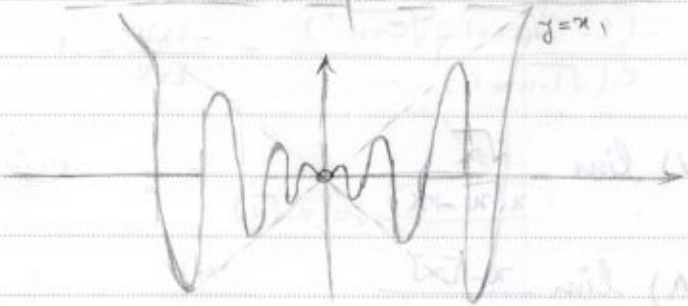


$\lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x}) \qquad x_0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ X



$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$



$-|x| \leq \underbrace{x\sin\frac{1}{x}}_{f(x)} \leq |x|$

① $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

② $\lim\limits_{x\to 0} -|x| = 0$

③ $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

$\xRightarrow{\text{فشردگی}} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \xRightarrow{\times x} -x \leq \sin\frac{1}{x} \leq x$

SANA

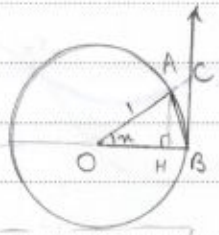
Subject

Date. Month. Year.

قضیه: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$



$S_{O\hat{A}B} < S_{\overset{\frown}{OAB}} < S_{O\hat{B}C}$

$\frac{1}{2} \times AH \times OB \qquad \frac{1}{2} \times OB \times BC$

$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2}\tan x \quad x > 0$

$\tan x < x < \sin x$

یادآوری

$\frac{x}{2\pi} = \frac{S_x}{\pi r^2}$

$S_x = \frac{1}{2} r^2 x$ مساحت قطاع

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \div \sin x < 0$

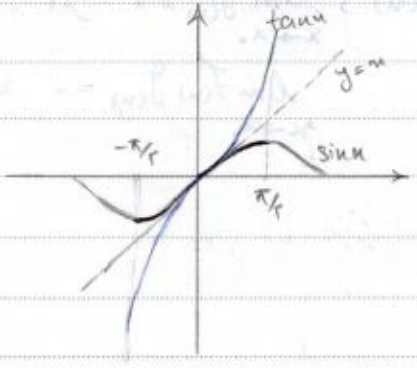
$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

خلاصه:

① $0 < x < \pi/2$ $\quad \sin x < x < \tan x$

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ $\quad \tan x < x < \sin x$

② $0 < |x| < \pi/2$ $\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$



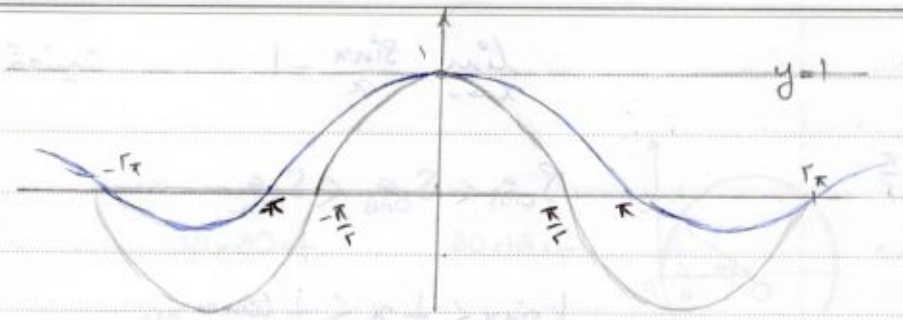
- اثبات قضیه به کمک فشردگی

نتایج دیگر: تعبیر ①

Subject

Date. Month. Year.

تعبیر ۲



سایر قضایای مشابه:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times 1 = 1 \qquad \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim \frac{x}{\tan x} = 1$$

امتیازی:

$$\lim \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-1}{6}$$

قضیه: اگر $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ و $f(x)$ در حوالی x_0 کران دار باشد،

آنگاه $\lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = 0$

بینهایت نشود

دارای max و min باشد

$m < f(x) < M$

$|f(x)| < K$

$$\lim_{x\to 2} (x^2-4)\cos\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$

$$-1 \le \cos\frac{1}{x-2} \le 1 \rightarrow \left|\cos\frac{1}{x-2}\right| \le 1 \qquad \times |(x^2-4)|$$

$$\rightarrow \left|(x^2-4)\left(\cos\frac{1}{x-2}\right)\right| < 1$$

Subject

Date. Month. Year.

اثبات:

$m < f(x) < M$

$m|g(x)| < f(x)\,g(x) < M|g(x)|$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$0 \Rightarrow 0 \Leftarrow 0$

فشردگی

$\left(\lim_{x\to 0} g = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} |g| = 0 \right)$

مثال:

$\lim_{x\to 0} \underbrace{\sin x}_{0} \; \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{کران دار}} = 0$

$\lim_{x\to 0} x[x-1] = 0$

چند نکته‌ی تکمیلی:

مثال برای فشردگی:

به کمک فشردگی اثبات کنید.

$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$

$x-1 < [x] \leq x$

امتیازی: $\lim_{x\to 0} \underbrace{\left[x\left[\frac{1}{x}\right]\right]}_{f(x)} = ?$ نمارد

اثبات:

$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} \longrightarrow \begin{cases} x>0 & 1-x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 \\ x<0 & 1-x > x\left[\frac{1}{x}\right] \geq 1 \end{cases}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad 1$

$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1 \Leftarrow$

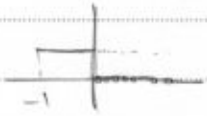
$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \rightarrow \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1 \xrightarrow{\times |x|} \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$

$\Rightarrow -|x| \leq x \sin\frac{1}{x} \leq |x|$

امتیازی:

$x>0 \quad 1-x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$

$> \qquad \geq$



$f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{n} \\ 0 & x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$

Subject

Date. Month. Year.

تغییر متغیر در حد:

در تغییر متغیر $t=g_{(x)}$

بایستی رفتار t حول مرکز همسایگی مشابه رفتار x باشد.

$$\lim_{x\to 0} f_{(x)} \overset{?}{\underset{\times}{=}} \lim_{x\to 0} f_{(t^2)}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{-[x]^2}\right) = 0$$

$t=0$

$D=[0,1)$

انتهایی

$$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{-t^2}$$

$t=[x]$ ✗

t فقط یک نقطه است

اما x یک بازه است.

نکته: وجود حد توابع f و g در x_0 برای وجود حد $f\circ g$ در x_0

نه لازم است نه کافی.

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g_{(x)}$$

$$g_{(x)} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \qquad f_{(x)} = x^2$$

$$g_{(x)} = -x^2$$

$$f_{(x)} = \sqrt{x}$$

$f\circ g$: $\sqrt{-x^2}$ ✗ همسایگی ندارد

قضیه: اگر $\lim_{x\to a} g_{(x)} = b$ و $f_{(x)}$ در یک همسایگی b تعریف شده

و در b حد داشته باشد) آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(g_{(x)}) = \cancel{f(\lim_{x\to a} g_{(x)})} = \lim_{t\to b} f(t)$$

(*) $g_{(x)}$ در همسایگی b تابع ثابت نباشد.

Subject

Date.- Month. Year.

پیوستگی:

گوییم f تابعی پیوسته است، هرگاه در هیچ یک از نقاط دامنه‌اش، بریدگی یا پرش نداشته باشد.

تعریف: فرض کنید f در بازه I شامل همسایگی x_0 تعریف شده باشد.

گوییم f در x_0 پیوسته است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) f در x_0 حد داشته باشد. (همزمان)

۲) حد f در x_0 با مقدار تابع در x_0 برابر باشد.

بنابراین: f در x_0 پیوسته است $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

مثال: پیوستگی توابع زیر در نقاط داده شده:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x\geq 1 \\ x^2-1 & x<1 \end{cases} \qquad x_0 = 1 \quad \times \qquad f \text{ در } x_0 \text{ حد ندارد}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & x\neq -1 \\ 2 & x=-1 \end{cases} \qquad x_0 = -1 \qquad \frac{x^2-1}{x+1} \to x-1 = -2$$

حد دارد ✓

$$f(-1) \neq \lim_{x\to -1} f(x) \quad \times$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x_0 = -1$$

$[-1,1]$

حد دارد

$$f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = 0$$

نکات:

۱- تابع چند جمله‌ای (و توابع مثل $\sin x$، $\cos$، نمایی، ...) روی R پیوسته است.

۲- تابع کسری گویا (روی دامنه‌اش) پیوسته است.

۳- تابع $[x]$ در $x \notin \mathbb{Z}$ پیوسته است.

تذکر: در توابع چند ضابطه‌ای، مرز دامنه‌ی ضابطه‌ها مشکوک است.

Subject

Date. Month. Year.

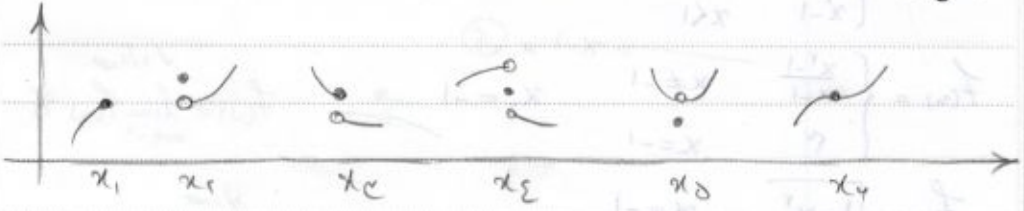
توجه: پیوستگی هر تابع فقط در نقاط دامنه‌اش بررسی می‌شود پس در مورد نقاطی که در دامنه‌اش نیستند هیچ بحثی در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی نداریم ضمناً اگر تابع‌ای در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته گویند.

پیوستگی از راست: $L_1 = f(x_0)$ ( )

پیوستگی از چپ: $L_2 = f(x_0)$ ( )

تذکر: پیوستگی در نقاط انتهایی به این معناست که حد راست (یا چپ) با مقدار تابع برابر باشد.

مثال:



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
حد	✓	✓	✗	✗	✓	✓
پیوسته	✓	✗	✗	✗	✗	✓
پیوسته از راست یا چپ	✓	✗	✓ (از چپ)	✗	✗	✓

Subject

Date. Month. Year.

قضایای پیوستگی

① فرض: f در x_0 پیوسته، g در x_0 پیوسته، همسایگی مشترک

حکم: $f \underset{\div}{\overset{\times}{\pm}} g$ در x_0 پیوسته (برای تقسیم: $g_{(x_0)} \neq 0$)

اثبات:

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) \underset{\text{وجود حد}}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\underset{\text{پیوستگی}}{=} f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

تذکر: عکس قضیه فوق برقرار نیست.

② فرض: f در x_0 پیوسته، g در x_0 ناپیوسته، x_0 میانی

حکم: $f \pm g$ در x_0 ناپیوسته

اثبات: خلف

$$\left.\begin{array}{l} f+g \text{ پیوسته} \\ f \text{ در } x_0 \text{ پیوسته} \end{array}\right\} \longrightarrow \underset{\text{پیوسته}}{(f+g)-f} \xrightarrow{x_0 \text{ میانی}} \underset{\text{پیوسته}}{g} \quad \times$$

تذکر: برای پیوستگی $f\circ g$ در x_0، کافی است g در x_0 و f در $g_{(x_0)}$ پیوسته باشد. اما لازم نیست

مثال: g در x_0 ناپیوسته و f پیوسته اما $f\circ g$ در x_0 پیوسته

$$f_{(x)} = |x| \qquad g_{(x)} = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

g در x_0 پیوسته باشد و f در $g_{(x_0)}$ ناپیوسته اما $f\circ g$ پیوسته

$$f_{(x)} = [x] \quad , \quad g_{(x)} = 1$$

Subject

Date. Month. Year.

قضیه: (کتاب درسی)

اگر g تابعی پیوسته و $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و ترکیب $g\circ f$ قابل انجام باشد ($R_f \subset D_g$) و $L\in D_g$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)}_{L})$$

قضیه حد $f\circ g$: اگر $\lim_{x\to a} g(x)=b$ و مقدار $g(x)$ در همسایگی a، برابر با b نباشد و $f(x)$ در همسایگی محذوف b تعریف شده باشد و در b حد داشته باشد.

آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(\underbrace{g(x)}_{t}) = \lim_{t\to b} f(t)$$

حالت خاص: اگر f در b پیوسته باشد:

$$= f(b) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x^2+x) = \sin(\lim_{x\to 0}(x^2+x)) = 0$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]}_{0} \overset{?}{=} \left[\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{1}\right]$$

$$\neq$$

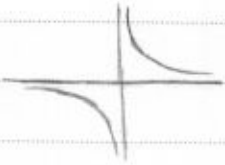
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Subject

Date. Month. Year.

حدود نامتناهی : < حد در بینهایت / حد بینهایت

$f(x) = \frac{1}{x}$



- $x \to +\infty \leftrightarrow \forall_{M>0} : x > M$

$x \to -\infty \leftrightarrow \forall_{M>0} : x < -M$

حد بینهایت (حد وجود ندارد) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$

حد در بینهایت $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \end{cases} \rightarrow$ حد وجود دارد

تعریف : حد در بینهایت : $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} f(x) = L$

$\forall_{\delta > 0} \quad \exists_{M>0} : \underset{(x<-M)}{x > M} \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$

حد بینهایت : (حد وجود ندارد) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty}$

$\forall_{M>0} \quad \exists_{\epsilon>0} \quad 0 < |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow f(x) > M$

حد بینهایت :

∞ عدد نیست ، اما می‌توان اعمال را به صورت نمایی بیان کرد.

SANA

Subject

Date. Month. Year.

حد بینهایت :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

حالت های ممکن x_0

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

میانی < راست / چپ

انتهایی ← همان طرف موجود

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad x>0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

اعمال نمادین : ($\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ↘ حدی (تابع ثابت نباشد) , $M \in R$)

	$M>0$	$M<0$
$\lim_{x\to x_0} \frac{M}{g(x)}$	$\frac{M}{0^+} = +\infty$ $\frac{M}{0^-} = -\infty$	$\frac{M}{0^+} = -\infty$ $\frac{M}{0^-} = +\infty$
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{M}$	$\frac{+\infty}{M} = +\infty$	$\frac{+\infty}{M} = -\infty$
$\lim_{x\to x_0} \frac{M}{f(x)}$	$\frac{M}{+\infty} = 0$	$\frac{M}{+\infty} = 0$
	$M+(+\infty) = +\infty$ $M\times(+\infty) = +\infty$ $M-(+\infty) = -\infty$ $+\infty - M = +\infty$	$M+(+\infty) = +\infty$ $M\times(+\infty) = -\infty$ $M-(+\infty) = -\infty$ $+\infty - M = +\infty$

Subject

Date. Month. Year.

حالت $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ (به عهده خود)

حالت $M=0$ ← مثال

$$\frac{M}{0^+} = 0$$

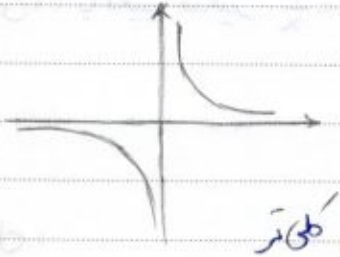
$$M \times (+\infty) = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2-1} \begin{cases} \xrightarrow{x\to 1^+} \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \xrightarrow{x\to 1^-} \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

حد در بینهایت



$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

کلی‌تر $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{M}{x^n} = 0$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} M \times \underbrace{\lim \frac{1}{x} \times \lim \frac{1}{x} \times \dots}_{n}$$

تذکر: ۱) لازمه $x\to+\infty$ این است که دامنه تابع شامل بازه‌ای مانند $(a,+\infty)$ می‌باشد.

۲) لازمه $x\to-\infty$ این است که دامنه تابع شامل بازه‌ای مانند $(-\infty,a)$ می‌باشد.

تعریف: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ یا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

Subject

Date. Month. Year.

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$$

x	$-\infty$	...	-10000	-100	0	100	10000
$f(x)$	2		$2{,}005$	$2{,}05$	$-0{,}5$	$1{,}951$	$1{,}9995$

روش محاسبه اصولی

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x+2}=2 \qquad \frac{\infty}{\infty}$$ ابهام

روش ۱:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})}=\frac{\overset{2}{\cancel{\lim 2}}-\overset{0}{\cancel{\lim 1/x}}}{\underset{1}{\cancel{\lim 1}}+\underset{0}{\cancel{\lim 2/x}}}=2$$

قضایای حد برقرار است

روش ۲: با تغییر متغیر $t=\frac{1}{x}$، حد در بینهایت، به حد در صفر تبدیل می‌شود

$$x=\frac{1}{t} \xrightarrow{\text{مثال}} \frac{\frac{2}{t}-1}{\frac{1}{t}+2}=\frac{2-t}{1+2t}\underset{t\to 0}{=}2$$

مثال:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+7x-5}{x^2+3x+1}=\frac{x^2(-2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+\sqrt{x+1}}=\frac{x(2+\frac{1}{x})}{x(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})}=2 \qquad \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}=\frac{1}{2}$$

$$x\to-\infty \qquad \frac{x(2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}{x(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

Subject

Date. Month. Year.

توجه ۱:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to+\infty}|x|=\lim_{x\to+\infty}x$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to-\infty}|x|=\lim_{x\to-\infty}(-x)$$

توجه ۲: اگر حاصل حد در بینهایت، عدد شد، حد موجود است و قضایای حد برقرار خواهد بود.

اگر حاصل حد در بینهایت، بینهایت شد، حد موجود نیست و قضایای حد برقرار نیست.

توجه ۳:

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^n=\begin{cases}+\infty & n \text{ زوج}\\ \pm\infty & n \text{ فرد}\end{cases}$$

روش های محاسبه ی حد در بینهایت:

الف) چند جمله ای: کافی است وضعیت بزرگترین جمله را تعیین کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\underbrace{(2x^5-3x^4+7x^3-3)}_{\underset{\pm\infty}{x^5}\underbrace{\left(2-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^3}-\frac{3}{x^5}\right)}_{2}}=\lim_{x\to\pm\infty}2x^5 \checkmark$$

ب) کسرهای گویا $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+5x^2-1}{4x^2+5x-1}=\lim\frac{3x^3}{4x^2}=\lim\frac{3}{4}x=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+5x^2-1}{4x^3+5x-1}=\lim\frac{3x^3}{4x^3}=3/4$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3+5x^2-1}{4x^4+5x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{4x}=0$$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

بطور کلی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

$$\begin{cases}\pm\infty & n>m\\ a_n/a_m & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}$$

بسته به زوج / فرد بودن $n-m$ و علامت a_n/b_m

ج) عبارت‌های رادیکالی

- ابتدا باید بررسی کرد که حد خواسته شده در دامنه باشد

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{2x+1}\quad \times$$

- باز هم فاکتورگیری از بزرگترین درجه صورت و مخرج را انجام می‌دهیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{2x+1}\left(=\frac{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=0\right)=\lim_{x\to0}\frac{\overset{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}=\lim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-\sqrt{2x-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\frac{4x}{x+|x|}=\frac{4x}{2x}=2$$

رفع ابهام $\infty-\infty$

۱) عبارتهای گویا: کافی است مخرج مشترک بگیریم.

مثال:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\overset{\frac{1-x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\left(\overset{+\infty}{\frac{1}{\underset{x(x-1)}{x^2-x}}}+\overset{-\infty}{\frac{1}{\underset{(x-1)(x-2)}{x^2-3x+2}}}\right)=\frac{\overset{2(x-1)}{x-2+x}}{x(x-1)(x-2)}=-2$$

Subject

Date. Month. Year.

۲) عبارتهای رادیکالی : با استفاده از مزدوج

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3}{2}$$

$$x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2+2x}-x}\times\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}\times\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$\lim\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{2}\qquad\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$$

حاشیه : $\dfrac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ مبهم

$$t=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\qquad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overset{-1\le\ \ \le1}{\sin x}}{\underset{\pm\infty}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0\qquad\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$$

SANA

Subject
Date. Month. Year.

مجانب ها

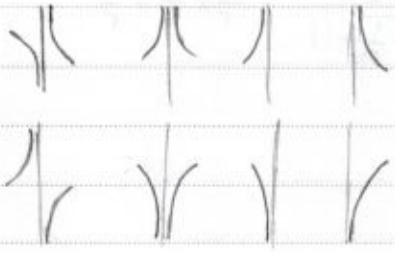
مجانب، خطی است که فاصله شاخه‌ای از منحنی با آن کم و کمتر شود

مجانب‌ها سه دسته‌اند: قائم، افقی، مایل

مجانب قائم: خط $x=x_0$ را مجانب قائم منحنی $y=f(x)$ گوئیم، هرگاه

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$$

حالت‌های ممکن:
$x\to x_0^+$
$x\to x_0^-$



کاندیدای مجانب قائم:

۱) ریشه‌های مخرج کسر (اگر ریشه صورت هم بود، باید رفع ابهام شود)

۲) tan در $k\pi+\frac{\pi}{2}$

مثال: $y=\frac{\cot x}{\cot x+1}$

۳) cot در $k\pi$

کاندید $\begin{cases} k\pi \Rightarrow 1 & \times \\ k\pi-\frac{\pi}{4} & \checkmark \end{cases}$

۴) $\log x$ در $x=0$

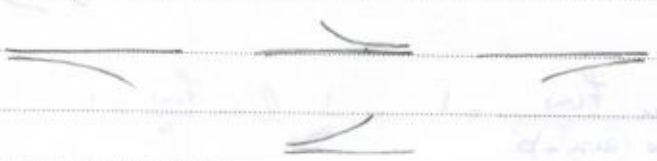
Subject

Date. Month. Year.

مجانب افقی: خط $y=y_0$ را مجانب افقی منحنی $y=f(x)$ گویند هرگاه

$$\lim_{x\to +\infty,\ -\infty} f(x)=y_0$$

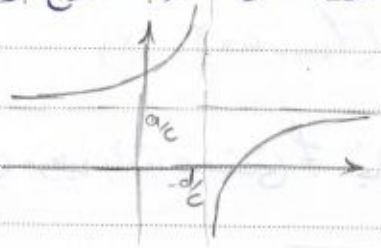
حالتهای ممکن:



* حداکثر تعداد مجانب افقی (و مایل روی هم)، ۲ تاست.

مثال: در توابع کسری، هرگاه درجه مخرج بزرگتر مساوی درجه صورت باشد. مثل:

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$



$y=\frac{a}{c}$

2^x

مجانب مایل: خط $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ را مجانب مایل منحنی $y=f(x)$ گوییم هرگاه:

$$\lim_{x\to +\infty,\ -\infty} \left(f(x)-(ax+b)\right)=0$$

حالتهای ممکن:

Subject

Date. Month. Year.

مثال: $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{x^2-4+3}{x+2}=x-2+\frac{3}{x+2}$

$\Rightarrow \left(f(x)-(x-2)\right)=\frac{3}{x+2} \to \lim_{x\to\pm\infty}=0$

روش سریعتر:

$ax+b$ / $f(x)$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{ax+b}=1 \to \frac{1}{a}\lim\frac{f(x)}{a}=1$

$\Rightarrow a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ (1)

$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)$ (2)

قضیه: اگر حد ۱ و ۲ همزمان موجود باشند، منحنی f مجانب مایل دارد.

۲ روش / $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x-1}-ax\right)=b$

$f(x)=\sqrt{x^2-x-1}$

- مجانب مایل؟

$a=1 \leftarrow$

$\frac{(1-a^2)x^2-x-1}{\sqrt{x^2-x-1}+ax} \to (1+a)x \longrightarrow b=\frac{-1}{2}$

مثال قبل به روش سریعتر:

$f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$

$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \to \frac{x^2-1}{x^2+2x}=1$

$\Rightarrow y=x-2$

$b=\lim\left(f(x)-x\right)=-2$

$\frac{x^2-1-x^2-2x}{x+2}$

SANA

Subject

Date. Month. Year.

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-1}$$

$$a=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}}\frac{f(x)}{x}\to\frac{\sqrt{x^2-x-1}}{x}\to|x|=1 \quad (-1) \Rightarrow y=x-\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\to-\infty}}\left(\sqrt{x^2-x-1}\underset{+}{-}x\right)\to\frac{-x-1}{\underset{-x}{\sqrt{x^2-x-1}}\underset{-}{+}x}=\frac{-1}{\underset{\frac{1}{2}}{2}} \Rightarrow y=\frac{1}{2}-x$$

تذکر: ممکن است، a (حد (۱)) موجود باشد ولی مجانب مایل نداشته باشیم.

مثال: $f(x)=x+\sqrt{x}$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-x}{\sqrt{x}}\right)\Rightarrow \times$$

قضیه: اگر مجانب f، $y=ax+b$، مجانب g، $y=a'x+b'$ باشد (یا دقیقاً یکی از آن‌ها خط باشد) آنگاه مجانب $f\pm g$ به صورت:

$$y=(ax+b)\pm(a'x+b')$$ خواهد بود.

مثال: $h(x)=\frac{x^2-1}{x+2}+x+\sqrt{x^2-x-1}+2$

مجانب در $+\infty$ $=(x-2)+x+(x-\frac{1}{2})+2=3x-\frac{1}{2}$

مجانب در $-\infty$ $=(x-2)+x+(-x+\frac{1}{2})+2=x+\frac{1}{2}$

Subject
Date. Month. Year.

محاسبه سریع‌تر مجانب مایل در دو حالت خاص مهم:

۱) توابع کسری گویا: خارج قسمت تقسیم (به شرط باقی‌مانده مخالف صفر) اگر درجه صورت دقیقاً یک واحد بیشتر از مخرج باشد.

مثال:

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2 & x^2-1 \\ \hline -\ x^3-x & x+2 \\ \quad 2x^2+x & \\ -\ 2x^2-x & \\ \quad x+2 & \end{array}$$

$y = x+2$

$$\frac{x^2-1}{x+1} = x-1$$

* باقی‌مانده صفر:
- خطی شونده نه مجانب

۲) توابع رادیکالی:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots} \rightarrow \begin{cases} n \text{ فرد} \Rightarrow y=\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right) \\ n \text{ زوج } (a>0) \Rightarrow \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right| \begin{cases} \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \end{cases} \end{cases}$$

در مثال گذشته:

$$f(x) = \sqrt{x^2-x-1}$$

$$\rightarrow \sqrt{1}\left|x+\frac{-1}{2\times 1}\right| \begin{cases} \xrightarrow{+\infty} x-\frac{1}{2} \\ \xrightarrow{-\infty} -x+\frac{1}{2} \end{cases}$$

Subject

Date. Month. Year.

اثبات دقیق : مجانب : $y=mx+h$

n فرد

1) $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\frac{\sqrt[n]{ax^n}}{x}=\sqrt[n]{a}$

۲)

$$h=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots}-\sqrt[n]{a}\,x\right)=\frac{b}{na^{\frac{n-1}{n}}}$$

رفع ابهام :

$$\frac{bx^{n-1}+c^{n-1}x^{n-2}+\dots}{\left(\sqrt[n]{ax^n+\dots}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{ax^n+\dots}\right)^{n-2}\left(\sqrt[n]{a}\,x\right)+\dots+\left(\sqrt[n]{a}\,x\right)^{n-1}}$$

$$n\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}x^{n-1}$$

$$\Rightarrow mx+h=\sqrt[n]{a}\,x+\frac{b}{na^{\frac{n-1}{n}}}=\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)$$

روش غیردقیق

$$\sqrt{(x-1)^2+4}\leftarrow\sqrt{x^2-2x+5}\approx mx+h$$

$$x^2-2x+5\simeq(mx+h)^2=\underbrace{m^2}_{m=1}x^2+\underbrace{2mh}_{h=-1}x+\underbrace{h^2}_{1}$$

صور مبهم $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$